微小撹乱に対するHillの球形渦の3次元応答(乱流の発生と統計法則)

福湯, 章夫; ロズ, タシプラト

数理解析研究所講究録
第 800 巻 1992 年 64-73

微小撹乱に対するHillの球形渦の3次元応答

東京電機大理工　福湯章夫 (Akio Fukuyu)
東京電機大理工　タシプラト・ロズ (Taxpolat Ruzi)

1. 非粘性流体の渦運動としてHillの球形渦が知られている。Hillの渦に微小撹乱を与えたときの応答についたは、軸対称撹乱についてのMoffattとMooreの解析[1]がある。本論文では一般の3次元的な微小撹乱を与えたときのHillの渦の応答を調べる。

時刻$t=0$にHillの球形渦の表面$S(t)$に撹乱が加えられたとする。以後の$S(t)$をεを微小パラメータとして

$$r = a\,(1 + \varepsilon h(\theta, \phi, t)) \tag{1}$$

で表す。Ω_+とΩ_-を$S(t)$の外部、内部領域とする。$t>0$での速度場$\mathbf{u}$を$\mathbf{u}_H = (u_H, v_H, 0)$を極座標系$(r, \theta, \phi)$でのHillの球形渦に対する速度場として

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{u}_H(r, \theta) + \varepsilon \mathbf{u}^{\pm}(r, \theta, \phi, t) \quad \text{in} \quad \Omega_{\pm} \tag{2}$$

の形に与える。以後すべての量は球形渦の半径、一様流の速度および流体の密度で無次元化されているとする。

外部領域Ω_+で$\mathbf{u}^+$は速度ポテンシャル$\Phi(r, \theta, \phi, t)$を用いて

$$\mathbf{u}^+ = \mathrm{grad}\,\Phi \tag{3}$$

で表される。

極座標系では$\Phi(r, \theta, \phi, t)$は球面調和関数を用いて次のように表される。

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A^e_{nm}(t) Y^e_{nm}(\theta, \phi) + A^o_{nm}(t) Y^o_{nm}(\theta, \phi)) r^{n+1} \tag{4}$$

こゝに、

$$Y^e_{nm}(\theta, \phi) = \cos m\phi\, P^m_n(z), \quad Y^o_{nm}(\theta, \phi) = \sin m\phi\, P^m_n(z), \quad z = \cos\theta$$

で$P_n{}^m(z)$は陪ルジャンドル関数である。このとき$\mathbf{u}^+ = (u^+, v^+, w^+)$は

$$\left.\begin{aligned}
u^{+} &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+1)A_{nm}Y_{nm}r^{n+2} \\
v^{+} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A_{nm}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial\theta}r^{n+2} \\
w^{+} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{A_{nm}}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial\phi}r^{n+2}
\end{aligned}\right\}\quad in\ \Omega_{+} \qquad (5)$$

で与えられる。こゝで簡単のために

$$A^{e}_{nm}(t)Y^{e}_{nm}(\theta,\phi) + A^{o}_{nm}(t)Y^{o}_{nm}(\theta,\phi) \qquad \text{etc.}$$

のかわりに$A_{nm}Y_{nm}$等で表した。軸対称変形の場合には内部領域Ω_{-}で$\mathbf{u}^{-}$は非回転的であるが、一般には$\mathbf{u}^{-}$は回転的である。領域Ω_{-}で圧力pを

$$p = p^{-}_{H} + \varepsilon p^{-} \qquad (6)$$

の形に置く。(2)、(6) をオイラー方程式に代入しεのオーダーの量を取ると

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial t} = -3r\cos\theta\, u^{-} + \frac{3}{2r}(1-3r^{2})\sin\theta\, v^{-} + \frac{3}{2}(1-r^{2})\cos\theta\frac{\partial u^{-}}{\partial r} - \frac{3}{2r}(1-2r^{2})\sin\theta\frac{\partial u^{-}}{\partial\theta} - \frac{\partial p^{-}}{\partial r} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial v^{-}}{\partial t} = -\frac{3}{2r}(1-6r^{2})\sin\theta\, u^{-} + \frac{3r}{2}\cos\theta\, v^{-} + \frac{3}{2}(1-r^{2})\cos\theta\frac{\partial v^{-}}{\partial r} - \frac{3}{2r}(1-2r^{2})\sin\theta\frac{\partial v^{-}}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial p^{-}}{\partial\theta} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial w^{-}}{\partial t} = \frac{3r}{2}\cos\theta\, w^{-} + \frac{3}{2}(1-r^{2})\cos\theta\frac{\partial w^{-}}{\partial r} - \frac{3}{2r}(1-2r^{2})\sin\theta\frac{\partial w^{-}}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p^{-}}{\partial\phi} \qquad (9)$$

を得る。また、連続の式は

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial r} + \frac{2u^{-}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v^{-}}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta\, v^{-}}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w^{-}}{\partial\phi} = 0 \qquad (10)$$

になる。圧力p^{-}の式は (7)、(8)、(9) から$\partial u^{-}/\partial t$、$\partial v^{-}/\partial t$、$\partial w^{-}/\partial t$を消去して

$$\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial p^{-}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^{2}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p^{-}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}p^{-}}{\partial\phi^{2}} = F(r,\theta,\phi) \qquad (11)$$

となる。こゝに、

$$F(r,\theta,\phi) = \left(-12\sin\theta\, v^{-} - 9r\cos\theta\frac{\partial u^{-}}{\partial r} - 3r\frac{\partial v^{-}}{\partial r} + 12\sin\theta\frac{\partial u^{-}}{\partial\theta}\right)$$

こゝで$\mathbf{u}^+$に倣ってu^-、v^-、w^-およびp^-を次のように展開する。

$$\left.\begin{aligned}
u^-(r,\theta,\phi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} u_{nm}(r,t)Y_{nm}(\theta,\phi)\\
v^-(r,\theta,\phi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} v_{nm}(r,t)\frac{\partial Y_{nm}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\\
w^-(r,\theta,\phi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{w_{nm}(r,t)}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{nm}(\theta,\phi)}{\partial\phi}\\
p^-(r,\theta,\phi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} p_{nm}(r,t)Y_{nm}(\theta,\phi)
\end{aligned}\right\}\quad in\ \Omega \qquad (12)$$

こゝでも上のように

$$u_{nm}(r,t)Y_{nm}(\theta,\phi) = u^e_{nm}(r,t)Y^e_{nm}(\theta,\phi) + u^o_{nm}(r,t)Y^o_{nm}(\theta,\phi) \qquad \text{etc.}$$

を$u_{\mathrm{nm}}(r,t)Y_{\mathrm{nm}}(\theta,\phi)$等で表した。(12)を(7)、(8)、(9)に代入して得られた式の両辺に$\cos m\phi$または$\sin m\phi$を掛けてϕについて積分し、陪ルジャンドル関数の漸化式を用いると

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \left\{u_{n-1},\ u_{n+1},\ v_{n-1},\ v_{n+1},\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial r},\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial r}\ \text{の一次式}\right\} - \frac{\partial p_n}{\partial r} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = \frac{(n-2)(n-m-1)(2n+1)}{(n+1)(n+m)(2n-1)}\frac{\partial v_{n-2}}{\partial t}$$

$$+\left\{u_{n-3},\ u_{n-1},\ u_{n+1},\ v_{n-3},\ v_{n-1},\ v_{n+1},\ \frac{\partial v_{n-3}}{\partial r},\ \frac{\partial v_{n-1}}{\partial r},\ \frac{\partial v_{n+1}}{\partial r}\ \text{の一次式}\right\} - \frac{1}{r}p_n \qquad (14)$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = \left\{w_{n-1},\ w_{n+1},\ \frac{\partial w_{n-1}}{\partial r},\ \frac{\partial w_{n+1}}{\partial r}\ \text{の一次式}\right\} - \frac{1}{r}p_n \qquad (15)$$

の形の式が得られる。方程式系はmについて閉じており、$u_{nm}{}^e$、$u_{nm}{}^o$は独立に同じ方程式を満たすので、以後簡単のために$u_{nm}{}^e$、$u_{nm}{}^o$等のかわりにu_n等を用いた。

(14)は$n \geqq m+1$,について成り立つので$\partial v_{m+1}/\partial t$の式は(14)に$n=m+1$を代入

して求まる。$\partial v_m/\partial t$ に対しては

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\partial v_n}{\partial t}P_n^m(z)=\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-6r)\sum_{n=m}^{\infty}u_n\int_{-1}^{z}P_n^m(x)\mathrm{d}x+\frac{3}{2}(1-r^2)\sum_{n=m}^{\infty}(\frac{v_n}{r}+\frac{\partial v_n}{\partial r})(zP_n^m(z)-\int_{-1}^{z}P_n^m(x)\mathrm{d}x)$$

$$-\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-2r)\sum_{n=m}^{\infty}\{n(n+1)\int_{-1}^{z}P_n^m(x)\mathrm{d}x-m^2\int_{-1}^{z}\frac{P_n^m(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x\}-\sum_{n=m}^{\infty}\frac{p_n}{r}P_n^m(z) \qquad (16)$$

が成り立つので、これから

$$\frac{\partial v_m}{\partial t}=\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-6r)\sum_{n=m}^{\infty}\alpha_n^m u_n++\frac{3}{2}(1-r^2)\sum_{n=m}^{\infty}(\frac{2m+1}{2m+3}\delta_{n,m+1}-\alpha_n^m)(\frac{v_n}{r}-\frac{\partial v_n}{\partial r})$$

$$-\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-2r)\sum_{n=m}^{\infty}\{n(n+1)\alpha_n^m-m^2\beta_n^m\}v_n-\frac{p_n}{r} \qquad (17)$$

を得る。こゝに、

$$\alpha_n^m=\frac{2(2m+1)}{(2m)!}\int_{-1}^{1}P_m^m(z)\int_{-1}^{z}P_n^m(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\quad \beta_n^m=\frac{2(2m+1)}{(2m)!}\int_{-1}^{1}P_m^m(z)\int_{-1}^{z}\frac{P_n^m(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

である。

$p_n(r)$ に対する式は

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dp_n}{dr})-\frac{n(n+1)}{r^2}p_n=f_n(r) \qquad (0<r<1) \qquad (18)$$

である。たゞし、

$$f_n(r)=\frac{(n-1)(n-m)}{2n-1}(12u_{n-1}-12v_{n-1}-3r\frac{\partial v_{n-1}}{\partial r})-\frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3}(12u_{n+1}-12v_{n+1}$$

$$-3r\frac{\partial v_{n+1}}{\partial r})-\frac{9(n-m)}{2n-1}r\frac{\partial u_{n-1}}{\partial r}-\frac{9(n+m+1)}{2n+3}r\frac{\partial u_{n+1}}{\partial r}$$

(18) の一般解は

$$p_n(r)=ar^n+br^{-(n+1)}+\frac{r^n}{2n+1}\int_1^r r^{-(n-1)}f_n(r)\mathrm{d}r-\frac{r^{-(n+1)}}{2n+1}\int_1^r r^{n+2}f_n(r)\mathrm{d}r \qquad (19)$$

である。

2. $\mathbf{u}^-$ に対する境界条件は $S(t)$ における流れの連続性から得られる。

速度場 $\mathbf{u}=(u, v, w)$ について、u の連続性から ε のオーダーで

$$u^-(1) = u^+(1) \qquad \text{したがって} \qquad u_n(1) = -(n+1)A_{nm} \tag{20}$$

v の連続性から

$$h(\theta, \phi) = \frac{2}{15\sin\theta}(v^-(1) - v^+(1)) \tag{21}$$

w の連続性から

$$w^-(1) = w^+(1) \qquad \text{したがって} \qquad w_n(1) = A_{nm} \tag{22}$$

$S(t)$ は同じ流体粒子で構成されるから圧力および圧力勾配も $S(t)$ で連続である。これから

$$p^-(1) = p^+(1), \qquad \frac{\partial p^-(1)}{\partial r} = \frac{\partial p^+(1)}{\partial r} - \frac{45}{2}\sin^2\theta\, h(\theta, \phi) \tag{23}$$

を得る。Ω_+ では Bernoulli 則が成り立つので ε のオーダーで

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + p^+ + \mathbf{u}_H^+ \cdot \mathbf{u}^+ = \text{const.} \tag{24}$$

従って

$$p^+ = p_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (1 - \frac{1}{r^3})\cos\theta\, u^+ + (1 + \frac{1}{2r^3})\sin\theta\, v^+ \tag{25}$$

(5) を用いると

$$p^+ = p_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{\partial A_{nm}}{\partial t}(\frac{1}{r})^{n+1} Y_{nm} + (1 - r^3)\cos\theta \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (n+1)A_{nm}(\frac{1}{r})^{n+2} Y_{nm}$$

$$+ (1 + \frac{1}{2r^3})\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} A_{nm}(\frac{1}{r})^{n+2}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \tag{26}$$

従って

$$\frac{\partial p^+}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (n+1)\frac{\partial A_{nm}}{\partial t}(\frac{1}{r})^{n+2} Y_{nm} + \frac{3}{a}\cos\theta \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (n+1)A_{nm}(\frac{1}{r})^{n+6} Y_{nm}$$

$$-(1 - \frac{1}{r^3})\cos\theta \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (n+1)(n+2)(\frac{1}{r})^{n+3} Y_{nm} - \frac{3}{2}\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} A_{nm}(\frac{1}{r})^{n+6}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta}$$

$$-(1+\frac{1}{2r^3})\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+2)A_{nm}(\frac{1}{r})^{n+3}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial\theta} \tag{27}$$

特に、 $r=1$ では

$$p^+(1)=p_0-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\partial A_{nm}}{\partial t}Y_{nm}+\frac{3}{2}\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A_{nm}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial\theta} \tag{28}$$

$$\frac{\partial p^+(1)}{\partial r}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+1)\frac{\partial A_{nm}}{\partial t}Y_{nm}+\frac{3}{a}\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+1)A_{nm}Y_{nm}$$

$$-\frac{3}{2}\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+3)A_{nm}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial\theta} \tag{29}$$

となる。p^+ を

$$p^+(r,\theta,\phi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}p^+_{nm}(r,t)Y_{nm}(\theta,\phi) \tag{30}$$

とすると上と同様にして

$$p^+_n(1)=-\frac{\partial A_n}{\partial t}+\frac{3}{2}\{\frac{(n-1)(n-m)}{2n-1}A_{n-1}-\frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3}A_{n+1}\} \tag{31}$$

$$\frac{\partial p^+_n(1)}{\partial r}=(n+1)\frac{\partial A_n}{\partial t}-\frac{3}{2}\{\frac{(n-2)(n+1)(n-m)}{2n-1}A_{n-1}-\frac{(n+2)(n+6)(n+m+1)}{2n+3}A_{n+1}\} \tag{32}$$

を得る。こゝでも、簡単のために A_{nm} の代わりに A_n を用いた。(31)、(32) から $\partial A_n/\partial t$ を消去すると

$$\frac{\partial p^+_n(1)}{\partial r}=-(n+1)p^+_n(1)+\frac{3}{2}\frac{(n+1)(n-m)}{2n-1}A_{n-1}+\frac{15}{2}\frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3}A_{n+1} \tag{33}$$

(21) を (23) に代入すると

$$\frac{\partial p^-_n(1)}{\partial r}=-\frac{3(n-1)(n-m)}{2n-1}(v^-_n(1)-A_{n-1})+\frac{3(n+2)(n+m+1)}{2n+3}(v^-_{n+1}(1)-A_{n+1})+\frac{\partial p^+_n(1)}{\partial r} \tag{34}$$

が得られ、結局 (33)、(34)、(23) から

$$\frac{\partial p_n^-(1)}{\partial r} = -(n+1)p_n^-(1) + C_n \tag{35}$$

を得る、こゝに、

$$C_n = -\frac{3(n-1)(n-m)}{2n-1}v_{n-1}^-(1) + \frac{3(n+2)(n+m+1)}{2m+3}v_{n+1}^-(1)$$

$$+\frac{3}{2}\frac{(3n-1)(n-m)}{2n-1}w_{n-1}^-(1) + \frac{9}{2}\frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3}w_{n+1}^-(1)$$

(35) は圧力方程式 (18) に対する境界条件である。

条件 (20)、(21)、(22)、(35) はすべてが独立の条件ではないことに注意しよう。実際、(20)、(22) は $\partial u_n/\partial t = -(n+1)\partial w_n/\partial t$ が $r=1$ で成り立つことを意味するが、(35) はこの条件とコンシステントである。

$r=1$ で (35) を満たし $p_n(0)=0$ なる (18) の解は

$$p_n(r) = \frac{C_n}{2n+1}r^n + \frac{r^n}{2n+1}\int_1^r r^{-(n-1)}f_n(r)\mathrm{d}r - \frac{r^{-(n+1)}}{2n+1}\int_0^r r^{n+2}f_n(r)\mathrm{d}r \tag{36}$$

となる。

3. こゝでは、$m=2$ の場合について計算した結果を示す。$m=2$ のとき

$$\alpha_2^2 = 8,\ \alpha_3^2 = -\frac{72}{7}\ \text{and}\ \alpha_n^2 = (-1)^n 8 \quad (n \geqq 4), \quad \beta_n^2 = (-1)^n 2n(n+1) \quad (n \geqq 2)$$

となる。これから

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = (\frac{1}{r} - 6r)\{\frac{5}{4}u_2 - \frac{45}{28}u_3 + \frac{5}{4}\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n u_n\}$$

$$+(1-r^2)\{\frac{5}{4}(\frac{v_2}{r} + \frac{\partial v_2}{\partial r}) - \frac{75}{28}(\frac{v_3}{r} + \frac{\partial v_3}{\partial r}) + \frac{5}{4}\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n(\frac{v_n}{r} + \frac{\partial v_n}{\partial r})\} + \frac{30}{7}(\frac{1}{r} - 2r)v_3 - \frac{p_2}{r} \tag{37}$$

一方、(2.25) に $m=2$、$n=3$ を代入し

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = (\frac{1}{r} - 6r)(\frac{9}{20}u_2 - \frac{1}{4}u_4) - (1-r^2)\{\frac{3}{20}(\frac{v_2}{r} + \frac{\partial v_2}{\partial r}) - \frac{5}{4}(\frac{v_4}{r} + \frac{\partial v_4}{\partial r})\}$$

$$-(\frac{1}{r}-2r)(\frac{3}{5}v_2-5v_4)-\frac{p_3}{r} \tag{38}$$

を得る。$\partial v_n/\partial t$ の $n\geqq 4$ に対する式は (14) に (37)、(38) を順々に代入して得られる。

こゝでは、初期条件として

$$A_2=1,\quad A_n=0\ (n\geqq 3).$$

を選ぶ。これは、$t=0$ で

$$u_2(1)=-3,\ \ w_2(1)=1,\quad u_n(1)=w_n(1)=0\qquad (n\geqq 3) \tag{39}$$

を意味する。$v_n(1)$ は任意である。$\mathbf{u}^-$ に対する初期条件は(39) と連続の式を満たすように選ぶ。

本論文では一例として ϕ に関して even part のみが励起されたとして

$$u_2(r,0)=-(\frac{21}{2}+4a)r+(\frac{15}{2}+4a)r^3,\ \ v_2(r,0)=-(\frac{21}{4}+2a)r+(\frac{25}{4}+8a)r^3,$$

$$w_2(r,0)=-(\frac{21}{4}+2a)r+(\frac{25}{4}+2a)r^3,\ u_4(r,0)=4a(r^3-r^5),\ v_4(r,0)=a(r^3-\frac{7}{5}r^5),\ w_4=\frac{5}{7}a(r^3-r^5),$$

$$u_n(r,0)=0,\ \ v_n(r,0)=0,\ \ w_n(r,0)=0\qquad (n=3\text{ or }n\geqq 5)$$

なる初期条件を採用する。a は任意である。このとき、$t=0$ で

$$h(\theta,\phi)=(\frac{31}{10}+\frac{2}{5}a)\frac{dP_2^2(z)}{dz}\cos 2\phi-(\frac{3}{50}+\frac{2}{45}a)\frac{dP_4^2(z)}{dz}\cos 2\phi$$

が成り立つ。これが初期攪乱を与える。$t>0$ での h は(21) から

$$h(\theta,\phi,t)=\frac{2}{15\sin\theta}\sum_{n=2}^{\infty}(v_n^-(1,t)-w_n^-(1,t))\frac{dP_n^2}{d\theta}\cos 2\phi$$

で計算できるはずであるが、右辺の級数は$\theta=0$、π 付近で非常に収束性が悪いので、こゝでは別の方法を用いる。

$S(t)$ は同じ流体粒子から構成されるので

$$\frac{D}{Dt}(r-1-\varepsilon h(\theta,\phi,t))=0$$

が成り立つ。これから、

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u^{-}(1,t) + 3\cos\theta\, h + \frac{3}{2}\sin\theta\, \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

を得る。これは、形式的には(21)とコンシステントである。本論文ではこの偏微分方程式を数値積分して $h(\theta, \phi, t)$ を求めた。

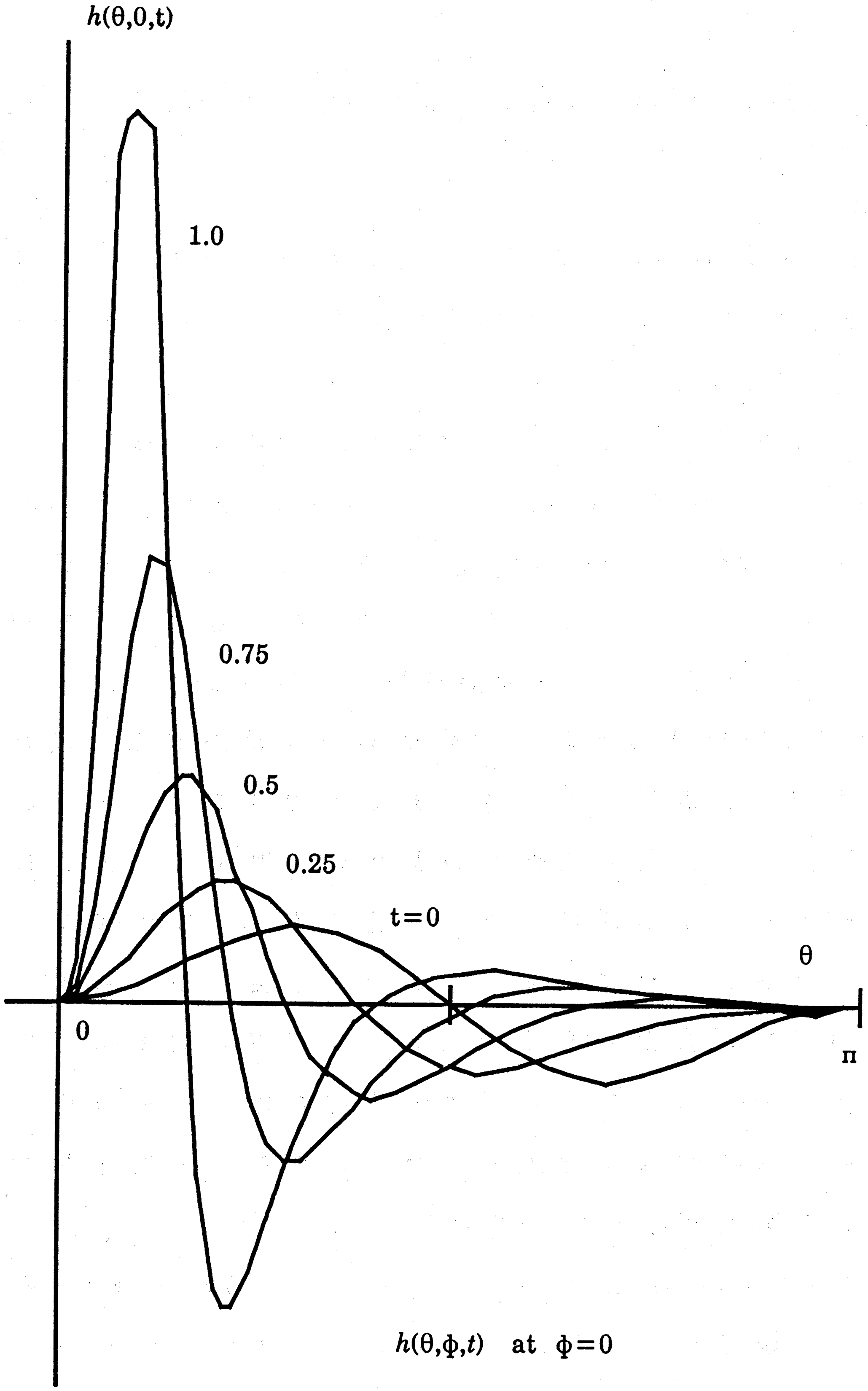
方程式系 (13)、(14)、(15) は n について閉じていないので、これを数値積分するには $n > N$ を無視して閉じた方程式系にしなければならない。こゝでは $N=60$ とした。また、r については $0 \leqq r \leqq 1$ を160等分した差分式を用いた。時間積分は4次の Runge-Kutta 法を適用した。

Moffatt-Moore [1] によれば、球形渦を長円形に変形すると、後部よどみ点付近で渦度を持った流体が針のような形に流出する。彼らはこれを spike とよんだ。逆に、初期にへん円形に変形すると、後部よどみ点付近から非回転流体が球形渦の中に流入する。

図は上の初期撹乱に対する応答を示したものである。図は $\phi=0$ の断面での表面の形 $h(\theta, 0, t)$ の時間発展を示した。$\theta=0$ は後部よどみ点に対応する。$t=0$ で与えられた撹乱が時間とともに後流側に流され、後部よどみ点に近ずくにつれて指数関数的に増大している。初期撹乱のピークが後流側に流されたあとは、撹乱は減衰しているようである。$m=2$ に注意すると、$h(\theta, \pi, t) = h(\theta, 0, t)$、さらに、$h(\theta, \pi/2, t) = h(\theta, 3\pi/2, t) = -h(\theta, 0, t)$ が成り立つ。従って、時間の経過とともに、後部よどみ点付近で Moffatt-Moore のいうspike に対応する形が現れるが、この場合ある部分で回転流体が流出すると、回転軸のまわりに90度回転した部分では逆に非回転流体が流入することになる。従って、時間とともに後部よどみ点付近の $S(t)$ は非常に特異な形になる。

文献

[1] Moffatt, H.K. and D.W.Moore, J.Fluid Mech. *87* (1978) 749



$h(\theta,\phi,t)$ at $\phi=0$